HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matematisk-naturvetenskapliga fakulteten	Institutionen för matematik och statistik

Tekijä — Författare — Author

Oskar Kortelainen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Euklidisk samt Icke-Euklidisk geometri

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematik

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu	April 2018	52 sidor

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Detta arbete är min Pro Gradu avhandling inom matematik och avhandlingen är gjord som en litteraturstudie.
I denna avhandling presenteras den Euklidiska geometrin genom att introducera Euklides fem postulat. Det femte postulatet, parallellpostulatet, behandlas närmare eftersom det länge var kontroversiellt och dess relation till de övriga postulaten var oklar.
I denna avhandling behandlas även bristerna i de Euklidiska postulaten på grund av att Euklides har baserat en del av sina bevis endast på figurer samt gjort antaganden som ej explicit bevisats. Det mest kända systemet för den Euklidiska geometrin där alla axiom är explicit formulerade är formulerad av David Hilbert. Hilbert formulerade 16 stycken axiom som indelas i fem grupper: incidensaxiomen, ordningsaxiomen, kontinuitetsaxiomen, kongruensaxiomen och parallellaxiomet.
Denna avhandling bygger upp och presenterar den Hyperboliska geometrin genom att presentera några av matematikerna som arbetade med att ställa upp den Hyperboliska geometrin. Detta gjorde de genom att anta att de fyra första postulaten av Euklides gäller. Dessutom presenteras det Hyperboliska axiomet som är negationen av Euklides parallellpostulat och samtidigt det femte antagandet för den Hyperboliska geometrin.
I avhandlingen tas det även upp tre stycken olika modeller för den Hyperboliska geometrin. Modellerna som tas upp är: Kleins modell samt Poincarés halvplansmodell och cirkelmodell. Till sist i avhandlingen bevisas det att den sistnämnda modellen är konsistent genom att använda oss av metoden med inversioner i cirklar. Med hjälp av denna metod kan det bevisas att de sex kongruensaxiomen som gäller för den Euklidiska geometrin också gäller för Poincarés cirkelmodell. Avhandlingen avslutas med en diskussion om vad konsistensen av modellen betyder.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Euklidisk geometri, Hyperbolisk geometri, Poincarés cirkelmodell, Inversioner i cirklar

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Euklidisk samt icke-Euklidisk geometri

Oskar Kortelainen

8 april 2018

Pro Gradu

Helsingfors Universitet

Innehåll

1 Inledning

Geometrin är en av de äldsta grenarna inom matematiken. Den har sina grunder i den gamla Egypten och Babylonien omkring 3000 f.Kr. Geometri var då en samling av empiriskt härledda principer om volymer, ytor, vinklar och längder. Dessa hade utvecklats för att tillfredsställa de praktiska behov som uppstått inom byggnadsteknik, lantmäteri och astronomi.
Grekerna utvecklade geometrin till att omfatta också nya figurer, kurvor, ytor och kroppar (600 f.Kr.–600 e.Kr.). Här kan bland annat nämnas Pythagoras som var den förste som presenterade ett deduktivt bevis för den sats som numera bär hans namn, Arkimedes som utvecklade metoder som starkt påminner om den analytiska geometrins koordinatsystem och integralkalkylens approximationer samt Euklides som skrev sitt verk Elementa som ger en axiomatisk beskrivning av geometrin.
Under början av 1800-talet gjordes det viktiga upptäckter kring Euklides parallellpostulat och flera av de stora matematikerna på den tiden hade kommit till slutsatsen att detta postulat var omöjligt att bevisa och därför utvecklade de istället något som vi idag kallar för den icke-Euklidiska geometrin. I denna geometri gäller inte detta postulat utan istället dess negation.
Denna avhandling startar från Euklides fem postulat och på så sätt bygger upp hela den Euklidiska geometrin. Därefter diskuteras det postulatet som bl.a. János Bolyai, Carl Gauss och Nikolai Lobatjevskij inte lyckades bevisa och dessutom diskuteras det vad som var problemet med postulatet och hur problemet har lösts tack vare David Hilbert. Efter detta så presenterar avhandlingen den hyperboliska geometrin och ett par av dess modeller. Till sist verifieras kongruensaxiomen för en av dessa modeller och det diskuteras vad verifikationen egentligen leder till och vad det betyder.
Avhandligen följer för det mesta boken av Greenberg [1] till struktur och bevis men en del av bakgrundsinformationen och bevisen har även hämtats från andra källor för att göra texten mera lättbegriplig och elegant.

Från tomma intet har jag skapat ett konstigt nytt universum.
- János Bolyai

2 Begrepp och notationer

2.1 Basnotationer

A$\neq$B	A är inte lika med B
A$\cong$B	A är kongruent med B
A$\simeq$B	A har samma längd som B
$\angle$A, $\angle$BAC, $\angle$CAB	Vinkel med ändpunkten A
$\overrightarrow{AB}$	Stråle med startpunkten A och som går genom punkten B
$\overleftrightarrow{AB}$	Linje genom punkterna A och B
A=B	A är lika med B
A$\|\|$B	Linjerna A och B är parallella
$\triangle$ABC	Triangel med hörnen A, B och C
$\|$AB$\|$	Längden av sträckan AB
A)(B	Den öppna kordan AB

2.2 Basbegrepp och basprinciper inom geometri

I detta delkapitel kommer jag att definiera begreppen som uppkommer i denna avhandling. Förutom dessa begrepp så innehåller avhandlingen också tre stycken primitiva begrepp, det vill säga begrepp som är odefinierade. Dessa begrepp är ”punkt”, ”linje” samt ”plan”. Dessa begrepp är primitiva på grund av att vi kunde lika bra ersätta dessa begrepp med någonting annat, såsom alfa eller beta, utan att validiteten av resultaten skulle påverkas.

Rektangel. En rektangel är en fyrhörning, där alla fyra hörnens vinklar är räta och därmed är dess vinkelsumma 360°. Dessutom är rektangelns motstående sidor parallella och har samma längd.

Triangel. En triangel är en trehörning som begränsas av tre sträckor, som kallas sidor. Vinkelsumman i en triangel är 180°.

Kongruens. Kongruens betyder att två geometriska figurer har samma storlek och form, men kan vara olika orienterade.

Transitivitet. Om a är kongruent med b och b är kongruent med c så gäller det att a är kongruent med c. Man kan också kalla detta för en transitiv relation.

Sida-vinkel-sida principen (SVS). Om två trianglar har två lika långa sidor och den mellanliggande vinkeln i respektive triangel är lika stor så gäller det att dessa två trianglar är kongruenta. Detta är en basegenskap för kongruens av trianglar samt en av kongruensaxiomen som gör kongruensbegreppet mera exakt.

Vinkel-sida-vinkel principen (VSV). Om två trianglar har två lika stora vinklar och den mellanliggande sidan i respektive triangel är lika långa så gäller det att dessa två trianglar är kongruenta. Detta är en basegenskap för kongruens av trianglar.

Sida-sida-sida (SSS). Om två trianglar har alla tre sidorna lika långa så vet vi att dessa trianglar är kongruenta. Detta är en basegenskap för kongruens av trianglar.

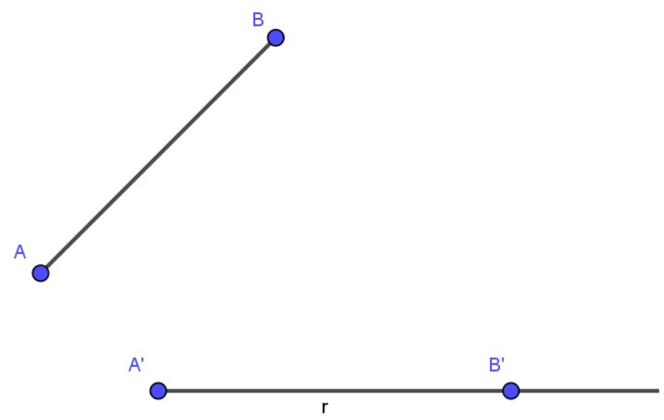
Pythagoras sats. För en rätvinklig triangel i den Euklidiska geometrin gäller det att kvadraten på hypotenusan är lika med summan av kvadraterna på kateterna.

Riktad vinkel. En vinkel är riktad ifall det par av strålar eller linjer som utgör vinkeln betraktas i en viss ordning.

2.3 Kongruensaxiomen

I detta delkapitel görs kongruensbegreppet mera exakt med kongruensaxiomen K1-K6. Dessa axiom härstammar från Euklides Elementa men han höll dom som mera intuitiva medan de axiom som jag nu presenterar är mera moderna och tydligare och är formulerade av David Hilbert. Dessa axiom är endast en del av axiomatiska systemet som Hilbert formulerade för att beskriva den Euklidiska geometrin. Det axiomatiska systemet av Hilbert behandlas utförligare i kapitel 3.3.

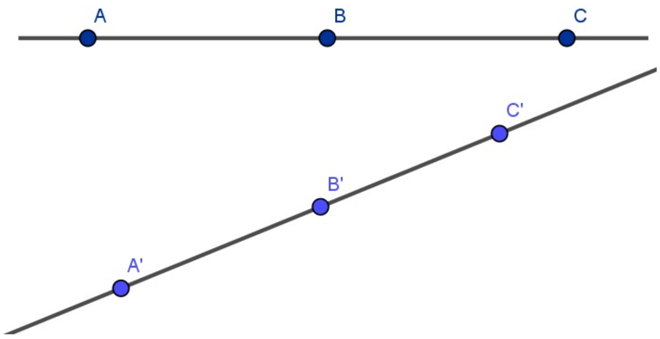
Kongruensaxiom 1. Om A och B är distinkta punkter och om A' är vilken som helst punkt så gäller det för varje stråle r, som har sin startpunkt i A', att det finns en unik punkt B' på r så att B'≠A' och AB≃A'B'.



Figur 1.

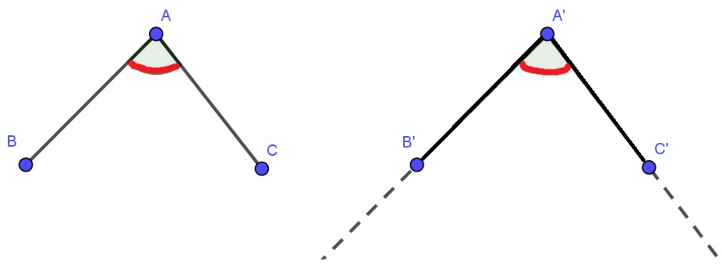
Kongruensaxiom 2. Om AB≅CD och AB≅EF, så gäller det att CD≅EF. Det gäller också att varje segment är kongruent med sig själv.

Kongruensaxiom 3. Om det existerar två linjer med punkterna i ordningen A, B och C respektive A', B' och C' samt att AB≅A'B' och BC≅B'C', så gäller det att AC≅A'C'.



Figur 2.

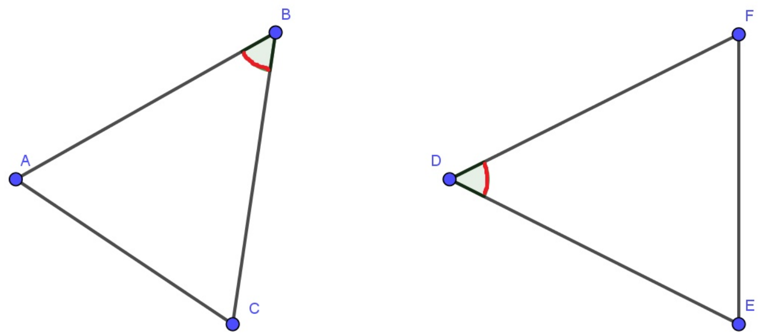
Kongruensaxiom 4. För vilken som helst vinkel ∠BAC (så att $\overrightarrow{AB}$ inte är motsatt till $\overrightarrow{AC}$) och för vilken som helst stråle $\overrightarrow{A'B'}$, som har sin startpunkt i A' så existerar det en unik stråle $\overrightarrow{A'C'}$ så att ∠B'A'C'≅ ∠BAC.



Figur 3.

Kongruensaxiom 5. Om ∠A≅ ∠B och ∠A≅ ∠C så gäller det att ∠B≅ ∠C. Det gäller också att varje vinkel är kongruent till sig själv.

Kongruensaxiom 6. (SVS) Om två sidor och den mellanliggande vinkeln av en triangel är kongruenta till två sidor och den mellanliggande vinkel av en annan triangel så är de två trianglarna kongruenta.



Figur 4. Om AB≅ED, CB≅FD och ∠B≅∠D så är △ABC≅△EDF.

3 Euklidisk geometri

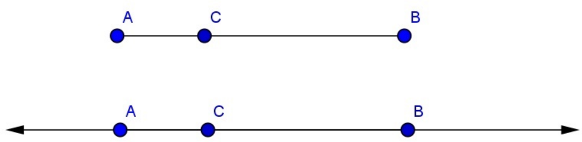
Euklides (325 f.Kr.-265 f.Kr.) baserade sin geometri på fem fundamentala antaganden som vi kallar axiom eller postulat. Jag kommer först att gå igenom de fyra första postulaten och därefter titta närmare på det femte postulatet, som är det intressantaste och mest kontroversiella av dem alla.

3.1 Euklides fyra första postulat

Euklides Postulat 1. *För varje punkt P och för varje punkt Q existerar det en unik linje l som går igenom punkterna P och Q, då P är olika Q.*

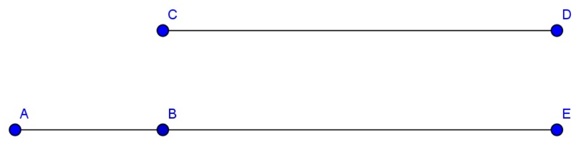
Man ser emellanåt detta postulat i formen " genom två olika punkter går precis en linje ". I denna avhandling betecknar jag en unik linje som går igenom P och Q med $\overleftrightarrow{PQ}$.
För att kunna framföra det andra postulatet så behöver vi först en ny definition.

Definition 1. Anta att vi har två punkter A och B. Segmentet AB är en mängd, vars medlemmar är punkterna A och B samt alla punkter som ligger på linjen $\overleftrightarrow{AB}$ och är mellan punkterna A och B (Figur 5). Punkterna A och B kallas ändpunkter för segmentet AB.



Figur 5. I den övre bilden ser man segmentet AB och i den nedre bilden ser man linjen $\overleftrightarrow{AB}$.

Euklides Postulat 2. *För varje segment AB och för varje segment CD existerar det en unik punkt E, så att B ligger mellan punkterna A och E och på linjen* $\overleftrightarrow{AB}$ *samt att segmentet CD är kongruent med segmentet BE (Figur 6).*



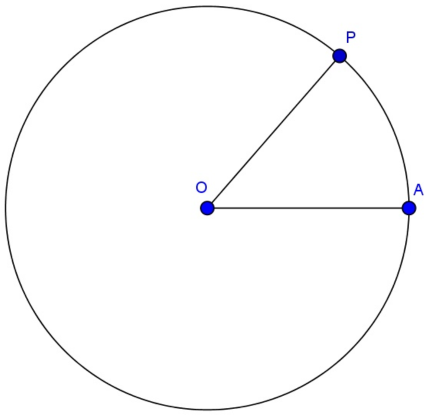
Figur 6. CD $\cong$ BE.

Detta postulat kan någongång ses i formen ”vilket som helst segment AB kan förlängas med ett segment BE som är kongruent till ett givet segment CD” eller ”varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat”.
För att kunna framföra det tredje postulatet så behöver vi igen en definition till.

Definition 2. Anta att vi har två punkter O och A. Mängden av alla punkter P, så att segmentet OP är kongruent med segmentet OA kallas för en cirkel med O som mittpunkt och varje segment OP kallas för cirkelns radie.

Från definitionen följer det också att OA $\cong$ OA, det vill säga A är också en punkt på cirkeln.

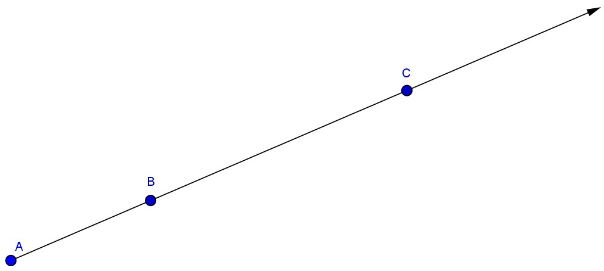
Euklides Postulat 3. *För varje punkt O och varje punkt A, som är olika O, existerar det en cirkel med mittpunkten O och radien OA (Figur 7).*



Figur 7. Cirkel med mittpunkten O och radien OA.

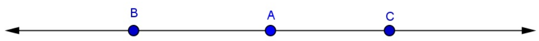
För att kunna framföra det fjärde postulatet kommer vi att behöva flera nya definitioner som behandlar bland annat strålar och vinklar.

Definition 3. Strålen $\overrightarrow{AB}$ är mängden av punkter som tillhör segmentet AB och alla punkter C på $\overleftrightarrow{AB}$, så att B ligger mellan A och C. Det sägs att strålen $\overrightarrow{AB}$ utgår från ändpunkten A och är en del av linjen $\overleftrightarrow{AB}$. (Figur 8)



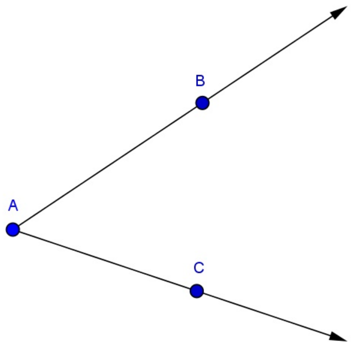
Figur 8. Strålen $\overrightarrow{AB}$.

Definition 4. Anta att vi har två strålar $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Strålarna är motsatta om de utgår från samma punkt A åt olika håll, dvs. B $\neq$ C, och bildar en rak linje så att $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. (Figur 9)



Figur 9. Motsatta strålarna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$.

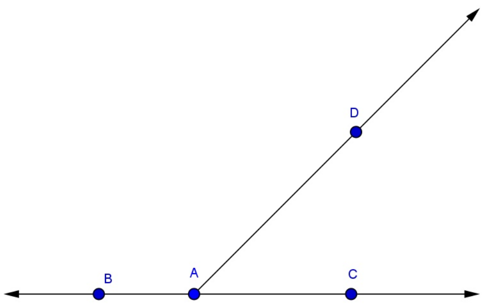
Definition 5. En vinkel med ändpunkten A är punkten A tillsammans med två icke-motsatta strålar $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ som utgår från punkt A. (Figur 10)



Figur 10. Vinkel med ändpunkten A.

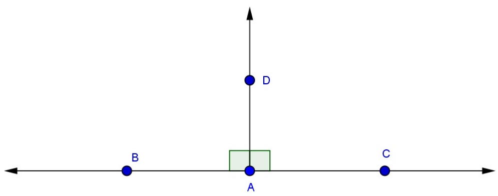
Vi använder oss av följande notationer för denna vinkel: $\angle$A, $\angle$BAC eller $\angle$CAB.

Definition 6. Om två vinklar $\angle$BAD och $\angle$CAD har en gemensam sida $\overrightarrow{AD}$ och de andra två sidorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är motsatta strålar, så är vinklarna $\angle$BAD och $\angle$CAD varandras supplementvinklar. (Figur 11)



Figur 11. Supplementvinklarna $\angle$BAD och $\angle$CAD.

Definition 7. En vinkel $\angle$BAD är en rak vinkel om den har en supplementvinkel med vilken den är kongruent. (Figur 12)



Figur 12. Raka vinklarna $\angle$BAD $\cong$ $\angle$CAD.

Nu kan vi framföra Euklides fjärde postulat.

Euklides Postulat 4. *Alla raka vinklar är kongruenta med varandra.*

Detta postulat uttrycker en slags homogenitet; även om två raka vinklar kan ligga långt ifrån varandra så har de ändå samma storlek.

Nu har vi introducerat de fyra första postulaten av Euklides geometri. Låt oss därefter betrakta det intressantaste postulatet, det vill säga Euklides femte postulat eller parallellpostulatet som det också är känt som.

3.2 Parallellpostulatet

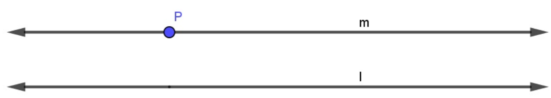
Matematikerna har alltid accepterat de fyra första postulaten av Euklid. Det femte postulatet, parallellpostulatet, har dock alltid varit kontroversiellt. Vi kommer att lära oss senare att tack vare att man började fundera på andra alternativ till parallellpostulatet så utvecklades den icke-Euklidiska geometrin.

Jag kommer inte att presentera parallellpostulatet i dess originalform till en början. Istället kommer jag att presentera ett konceptuellt enklare postulat, som jag senare kommer att bevisa att är logiskt ekvivalent med Euklides originalversion av postulatet. Man kallar ofta denna version för Playfairs parallellpostulat efter den skotska matematikern John Playfair. Postulatet publicerades 1795 i hans tolkning av den Euklidiska geometrin. Den viktigaste definitionen vi behöver för postulatet är följande:

Definition 8. Anta att vi har två linjer l och m. Linjerna l och m är parallella om de inte skär varandra, det vill säga ingen punkt ligger på båda linjerna. Vi betecknar detta med l || m.

Vi måste notera att vi antar i detta fall att linjerna l och m ligger i samma plan om inte annat nämnts. Som andra sak måste vi notera att definitionen säger inte att linjerna är ekvidistanta, det vill säga att avståndet mellan linjerna är det samma överallt. Samtidigt så kan vi inte heller göra antagandet att parallella linjer inte skulle vara ekvidistanta. Så det enda vi vet med säkerhet för tillfället är att parallella linjer inte möter varandra.

Playfairs parallellpostulat. För varje linje l och för varje punkt P, som inte ligger på l så existerar det en unik linje m genom P som är parallell med l. (Figur 13)

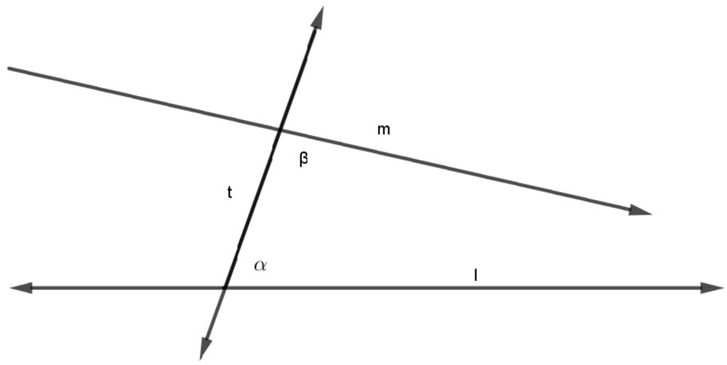


Figur 13. Linjerna l och m är parallella.

Varför skulle detta postulat vara kontroversiellt? Postulatet kanske förefaller som en självklarhet för oss som blivit vana att tänka inom de Euklidiska villkoren. Vi kan dock se en klar skillnad mellan Playfairs parallellpostulat samt Euklides fyra första postulat om vi betraktar dem utgående från geometrins axiom. De två första Euklides' postulat kan härledas med hjälp av en linjal. Tredje postulatet härleds genom att rita med en passare och de fjärde postulatet kan härledas av vår förmåga att mäta vinklar med en gradskiva.

Playfairs parallellpostulat är annorlunda eftersom vi inte kan empiriskt avgöra om två linjer möts då vi endast kan rita segment. Vi kan förlänga segmenten längre och längre men vi kan inte hålla på och förlänga dem för evigt. Vår enda möjlighet att bevisa parallellitet är att använda andra kriterier än definitionen.

Finns det andra kriterier för att linjen l skall vara parallell med m än definitionen? Euklid framförde att man skulle rita en rät linje t så att den korsar både l och m i distinkta punkter, och mäta de inre vinklarna α och β på ena sidan av t. Euklid förutspådde att om summan av vinklarna α och β är mindre än 180° så skulle linjerna l och m mötas på samma sida av t som vinklarna α och β låg (Figur 14). Detta är de facto innehållet i Euklides femte postulat.



Figur 14. Euklides idé hur man skulle bevisa att l och m är parallella.

Euklides Postulat 5. (Parallellpostulatet)
Om två linjer korsas med en rät linje så att summan av de två inre vinklarna på ena sidan av den räta linjen är mindre än 180°, så möts de två linjerna på den sidan av den räta linjen som vinklarna befinner sig på.

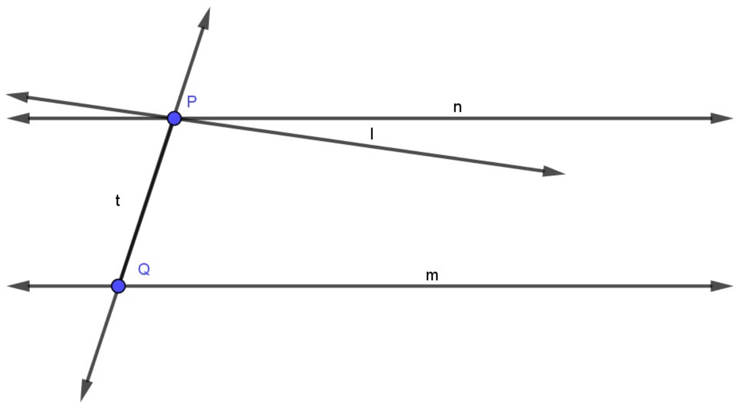
Problemet med detta kriterium för parallellitet är att det i självaverket är logiskt ekvivalent med Playfairs parallellpostulat, så vi kan inte använda oss av detta kriterium för att bevisa att Euklides femte postulat är korrekt (cirkelresonemang). Euklid noterade också själv problemet med sitt parallellpostulat och undvek därför användningen av det så långt som möjligt i sina bevis i Elementa.

I närmare tvåtusen år försökte matematiker bevisa parallellpostulatet med hjälp av de fyra andra postulaten eller ersätta det med ett mera självklart postulat. Alla försök med att bevisa parallellpostulatet från de fyra andra postulaten var misslyckade på grund av att ”bevisen” alltid innehöll något undangömt antagande som inte var bevisat. Försöken att ersätta parallellpostulatet med något annat postulat misslyckades eftersom det visade sig att ersättningspostulatet alltid var logiskt ekvivalent med parallellpostulatet.
Låt oss nu bevisa att Playfairs parallellpostulat och Euklides femte postulat är logiskt ekvivalenta. För att kunna göra detta behöver vi en ny definition.

Definition 9. Om två linjer korsas med en rät linje så att de inre vinklarna på ena sidan av den räta linjen är varandras supplementvinklar, så är linjerna parallella.

Sats 1. *Playfairs parallellpostulat är logiskt ekvivalent med Euklides femte postulat.*

Bevis. Vi bevisar först att vi kan härleda Euklides femte postulat ur Playfairs parallellpostulat (PPP). Vi antar att PPP gäller och att vi har två linjer l och m som är korsade med en rät linje t i punkterna P och Q så att summan av inre vinklarna på ena sidan av t är mindre än 180. Med hjälp av en gradskiva kan vi nu konstruera en linje n genom punkten P så att summan av inre vinklarna för n och m, på samma sida av t som tidigare, är 180.



Figur 15.

Nu enligt definitionen är linjerna n och m parallella och enligt PPP så är n den enda linjen som går genom punkten P och är parallell med linjen m. Från detta följer det att l inte är parallellt med m och därför möts de på den sidan av t som vi betraktat för annars skulle triangeln som de bildar ha en vinkelsumma som är större än 180. Det vill säga PPP implicerar Euklides femte postulat.

Sedan bevisar vi att vi också kan härleda PPP ur Euklides femte postulat. Vi antar att Euklides femte postulat gäller och att l' är en linje och P en punkt som inte ligger på linjen. Vi kan konstruera en entydig linje l som går genom P och är parallell med l' på följande sätt: låt oss rita en linje från punkt P till l' som är vinkelrät med l'. Vi betecknar denna linje med $\overleftrightarrow{PQ}$ och punkten där l' och $\overleftrightarrow{PQ}$ korsar varann med Q. Sedan konstruerar vi en linje l som är vinkelrät med $\overleftrightarrow{PQ}$ genom punkten P. Vi bevisar nu att det kan inte finnas andra linjer än l som går genom punkten P och är parallell med l'. Vi antar att m är en sådan linje som är parallell med l' genom punkten P. Vi vet att m inte kan vara vinkelrät till $\overleftrightarrow{PQ}$ i punkten P för att l är, så vinkeln den bildar med $\overleftrightarrow{PQ}$ måste vara mindre än 90 på ena sidan av $\overleftrightarrow{PQ}$. På denna sida är summan av de inre vinklarna för m och l' mindre än 180 så enligt Euklides femte postulat så möts de på denna sida av $\overleftrightarrow{PQ}$ och därför kan alltså inte m och l' vara parallella. Det vill säga Euklides femte postulat implicerar PPP.$\blacksquare$

Nu har vi alltså bevisat att Euklides femte postulat implicerar Playfairs parallellpostulat och vice versa, så vi kan konstatera att de är logiskt ekvivalenta.

3.3 Brister i de klassiska Euklidiska postulaten

De klassiska Euklidiska postulaten (5 st) är inexakta och ofullständiga. Euklides har t.ex. baserat endel av sina bevis på olika figurer samt gjort en del antaganden i t.ex. anordningsaxiomen. Många matematiker märkte att Euklides postulat inte var exakta och därför formulerades det många nya axiomatiska system. Det mest kända systemet formulerades av den tyska matematikern David Hilbert (1862-1943). Hilbert formulerade 16 stycken moderna axiom för att beskriva den Euklidiska geometrin. Dessa axiom uppdelades i 5 olika grupper.

Incidensaxiomen talar om när en punkt och en rät linje (eller ett plan) är incidenta. En punkt och en rät linje är incidenta om punkten ligger på linjen (i planet) och en rät linje och ett plan är incidenta om linjen ligger i planet.

Ordningsaxiomen talar om ordningen mellan olika punkter på en rät linje. Hilbert bevisar t.ex att när en punkt B ligger mellan en punkt A och en punkt C, så är A, B, C tre olika punkter på en rät linje, och B ligger då även mellan C och A.

Parallellaxiomet är nästan densamma som Euklides framförde men Hilbert gjorde axiomet något svagare, det vill säga i Hilberts axiomsystem formulerades axiomet på följande sätt:
För varje linje l och varje punkt P som inte ligger på l så existerar det högst en linje m genom P så att m är parallell med l.
Euklides formulerade sitt axiom på samma sätt men enligt honom så existerar det åtminstone en linje m genom P så att m är parallell med l. Hilbert behövde inte anta detta för det går att bevisa utgående från de övriga axiomen i Hilberts system att detta också stämmer

Kontinuitetsaxiomen används av Hilbert för att fylla en del luckor i Euklides bevisföring i Elementa. Dessa axiom är formulerade av andra matematiker såsom Arkimedes (287-212 f.Kr.) och Aristoteles (384-322 f.Kr.).

Kongruensaxiomen vars innehåll jag redan tidigare presenterat (s. 6-7) talar om kongruensen för segment samt vinklar. Man har också inkluderat en av triangelns kongruensegenskaper, det vill säga SVS-principen, till dessa axiom. Dessa axiom är egenskaper som gör kongruensbegreppet mera exakt.

4 Upptäckten av den icke-Euklidiska geometrin

Det är märkvärdigt att emellanåt när tiden är den rätta för nya idéer att träda fram så råkar det sig att flera personer får samtidigt den samma idén. På 1700-talet upptäckte Newton i England och samtidigt Leibniz i Tyskland infinitesimalkalkylen, och på 1800-talet fanns det flera matematiker som upptäckte den icke-Euklidiska geometrin. I detta kapitel påminner jag kortfattat om en del av dessa personer som var med och upptäckte den icke-Euklidiska geometrin.

4.1 János Bolyai

János Bolyai (1802-1860) var en ungersk matematiker som hade en passion för geometri. János pappa Farkas var också en känd matematiker och han började undervisa sin son redan i tidig ålder. János studerade matematik i Wien mellan åren 1818 och 1820. I slutet av sin tid i Wien samt ett par år därefter arbetade János med en avhandling om icke-Euklidisk geometri. Hans arbete publicerades först 1832, som ett 26-sidigt appendix till hans fars bok. Farkas skickade en kopia av sin bok till sin vän Gauss. Gauss tyckte att arbetet, som János hade gjort, var mycket genialiskt men Gauss hade själv kommit fram till liknande saker redan tidigare. Detta gjorde János väldigt besviken och det ledde till att han aldrig mer publicerade någonting, men man har hittat efter hans död över 20000 sidor av anteckningar om olika matematiska ämnen, bl.a. en geometrisk beskrivning av komplexa tal.

4.2 Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) var en tysk matematiker. Det finns bevis att Gauss hade jobbat med icke-Euklidisk geometri sen han var 15 år gammal och att han hade förutsett några av Janis Bolyais upptäckter. Tyvärr publicerade Gauss sina idéer i väldigt liten utsträckning, för han var väldigt mån om att publicera endast fullständiga upptäckter med så eleganta bevis som möjligt. De få resultaten som han hade skrivit ner gällande den icke-Euklidiska geometrin, hittades först efter hans död bland hans privata papper.

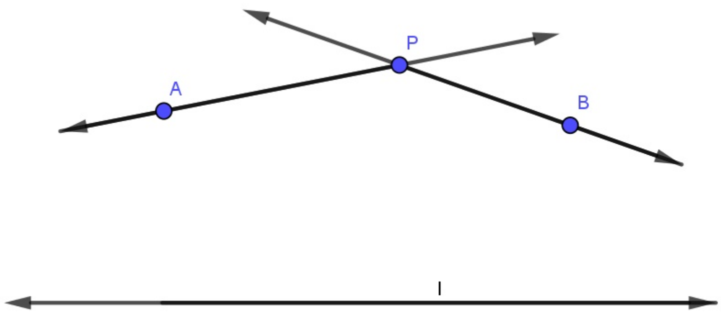
4.3 Nikolai Lobatjevskij

Nikolai Lobatjevskij (1792-1856) var en rysk matematiker. Han var år 1829 den första att publicera sina idéer om den icke-Euklidiska geometrin. Innehållet i hans verk fick inte en så stor uppmärksamhet för de var skrivna på ryska. 1840 skickade han sin avhandling, skriven på tyska, till Gauss. Det finns bevis att Gauss har skrivit att ”Lobatjevskij utförde uppgiften på ett mästerligt sätt och i en sann geometrisk anda” åt en annan tysk matematiker i sina brev.
Det är förvånansvärt hur liknande Bolyais and Lobatjevskijs sätt att närma sig icke-Euklidisk geometri var. Båda utvecklade ämnet mycket längre än Gauss. Både Bolyai och Lobatjevskij konstruerade t.ex. en kartavbildning från en sfär till det icke-Euklidiska planet för att skapa formlerna för den icke-Euklidiska trigonometrin. Både Bolyai och Lobatjevskij hade en konstant i sina formler, vilken de inte kunde förklara. Bernhard Riemann visade senare att konstanten var krökningen av det icke-Euklidiska planet. Ändå var det inte förrän Gauss död 1855, när hans korrespondens publicerades, som den matematiska världen började ta de icke-Euklidiska idéerna seriöst.

4.4 Hyperbolisk geometri

Den icke-Euklidiska geometrin som Gauss, J.Bolayi och Lobatjevskij var med om att upptäcka kallas nuförtiden för den hyperboliska geometrin. Det finns också andra former av icke-Euklidisk geometri såsom elliptisk geometri som upptäcktes av Riemann men den kommer jag inte att gå desto mera in på. Hyperbolisk geometri är enligt definitionen den geometrin man får genom att anta alla andra postulat förutom parallellpostulatet och ersätta parallellpostulatet med dess negation, någonting som vi här kallar för det ”hyperboliska axiomet”.

Hyperboliska axiomet. I den hyperboliska geometrin existerar det en linje l och en punkt P som inte ligger på l så att åtminstone två distinkta linjer som är parallella med l passerar genom punkten P. (Figur 16)



Figur 16.

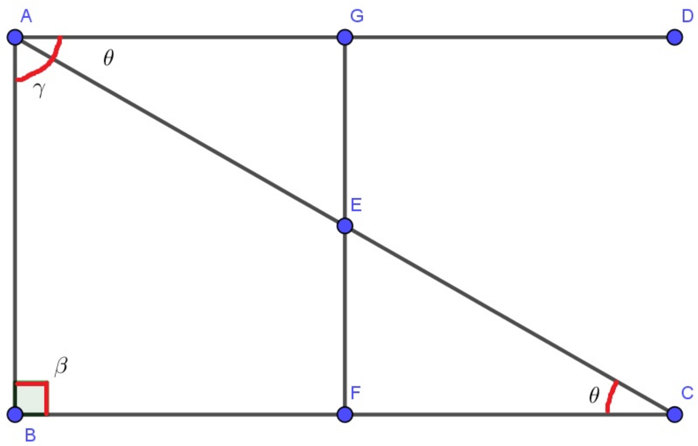
Vi får en viktig följd av det hyperboliska axiomet men först behöver vi ett par nya definitioner.

Definition 10. En Lambert fyrhörning är en fyrhörning med tre räta vinklar. Den fjärde vinkeln är spetsig och de intilliggande sidorna till vinkeln är längre än motstående sidorna.

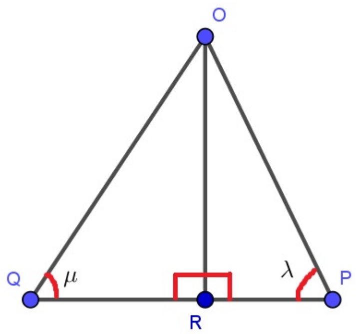
Ovannämnda fyrhörning är uppkallad efter den schweiziska matematikern Johann Heinrich Lambert (1728-1777).

Sats 2. *I hyperbolisk geometri har alla trianglar en vinkelsumma som är mindre än 180.*

Bevis. Anta först att vi har rätvinklig triangel △ABC med den räta vinkeln β. Vi ritar en linje $\overleftrightarrow{AD}$ genom punkten A så att de övriga vinklarna i △ABC är lika stora, $\gamma = \theta$. Från mittpunkten E av $\overleftrightarrow{AC}$ så ritar vi en vinkelrät linje $\overleftrightarrow{EF}$ till BC samt en vinkelrät linje $\overleftrightarrow{EG}$ (Figur 17). Linjerna $\overleftrightarrow{AD}$ och $\overleftrightarrow{BC}$ är parallella för att de är båda vinkelräta till linjen $\overleftrightarrow{GF}$. Därmed är ABFG en Lambert fyrhörning och $\angle GAB$ är den spetsiga vinkeln. Detta leder till att $\alpha + \gamma = \alpha + \theta = \angle GAB < 90°$, det vill säga $\alpha + \gamma < 90°$. Därmed är vinkelsumman i triangeln ABC, $\alpha + \beta + \gamma < 180°$. Om vi å andra sidan har en triangel som inte är rätvinklig så vet vi att den har åtminstone två spetsiga vinklar. Vi antar att OPQ är en sådan triangel och vi kallar de spetsiga vinklarna för λ och μ. Vi ritar en höjd ner från O till linjen $\overleftrightarrow{PQ}$ och kallar punkten den träffar för R (Figur 18). Enligt definitionen på en höjd så har triangeln △OPQ blivit uppdelad i två rätvinkliga trianglar △OPR och △ORQ. Eftersom summan av λ och $\angle POR$ samt summan av μ och $\angle QOR$ är mindre än 90° enligt samma princip som ovan så är vinkelsumman för triangeln △OPQ mindre än 180°. ■



Figur 17.



Figur 18.

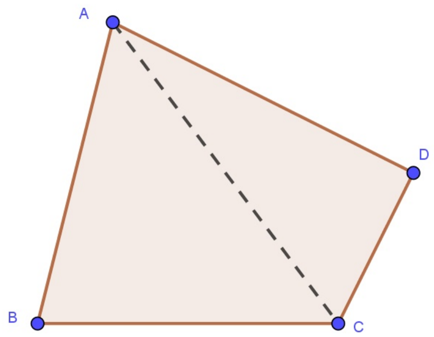
Om $\triangle$ABC är vilken som helst triangel i den hyperboliska geometrin så är 180° minus vinkelsumman av $\triangle$ABC ett positivt värde. Detta värde kallas för triangelns defekt och den spelar en viktig roll i hyperboliska geometrin.

Korollarium 1. I den hyperboliska geometrin har alla fyrhörningar en vinkelsumma som är mindre än 360°.

Bevis. Vi antar först att vi betraktar vilken som helst fyrhörning ABCD (Figur 19) som är konvex. Låt oss rita diagonalen AC så att det bildas trianglarna $\triangle$ABC och $\triangle$ACD. Antagandet att ABCD är en konvex fyrhörning leder till att $\overrightarrow{AC}$ ligger mellan $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AD}$ samt att $\overrightarrow{CA}$ ligger mellan $\overrightarrow{CB}$ och $\overrightarrow{CD}$, så att

$$\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$$
$$\angle ACB + \angle ACD = \angle BCD.$$

Enligt sats 2 så har dessa trianglarna $\triangle$ABC och $\triangle$ACD en vinkelsumma som är mindre än 180°. Genom att addera alla sex vinklar (tre per triangel) så märker vi att vinkelsumman för ABCD är mindre än 360°.
Å andra sidan om vi antar att vi har en konkav fyrhörning så är beviset identiskt på det viset att vi kan uppdela en konkav fyrhörning i två icke-rätvinkliga trianglar och använda oss av andra delen av beviset för sats 2. ■



Figur 19. En konvex fyrhörning.

Lemma 1. Rektanglar existerar inte inom den hyperboliska geometrin.

Bevis. Enligt definitionen på en rektangel så har den en vinkelsumma på 360°, men enligt korollarium 1 har alla fyrhörningar inom den hyperboliska geometrin en vinkelsumma som är mindre än 360°. Därmed kan inte rektanglar existera inom den hyperboliska geometrin. ■

Vi kan fastställa en universell version av det hyperboliska axiomet genom att använda lemmat. Parallellpostulatet i den Euklidiska geometrin anger att för varje linje och för varje punkt som inte är på linjen så håller entydigheten av parallellerna. Parallellpostulatets negation, det hyperboliska axiomet, anger att för någon linje l och någon punkt P som inte är på linjen l, så gäller inte entydigheten av parallellerna. Finns det en möjlighet i den hyperboliska geometrin att entydigheten av parallellerna skulle misslyckas för något l och P men gälla för något annat par l' och P'? Jag kommer att visa att detta är en omöjlighet.

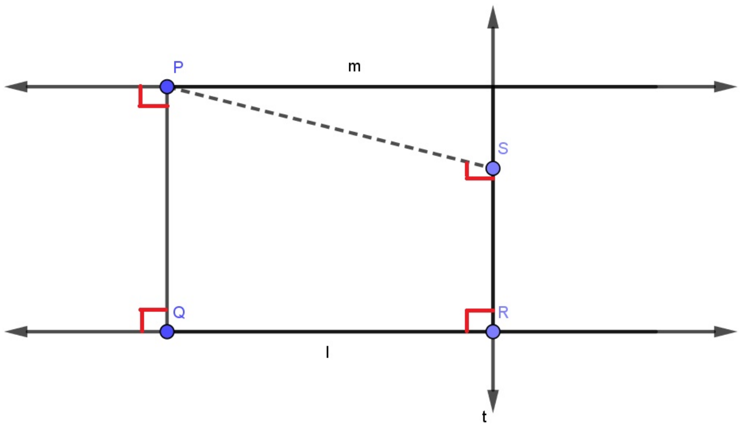
För att bevisa nästa sats så behöver vi ett nytt korollarium till det hyperboliska axiomet.

Korollarium 2. Två linjer är parallella om de är vinkelräta mot samma linje.

Bevis. Om linjerna l och l' är vinkelräta mot linjen t så är de inre vinklarna vinkelräta och därav kongruenta enligt Euklides fjärde postulat. ■

Universella satsen för hyperboliska geometrin. *I den hyperboliska geometrin gäller det att för varje linje l och varje punkt P som inte är på linjen l så existerar det åtminstone två olika paralleller linjer som passerar genom P.*

Bevis. Rita en vinkelrät linje $\overleftrightarrow{PQ}$ till linjen l samt en linje m genom punkten P som är vinkelrät till $\overleftrightarrow{PQ}$. Låt R vara en annan punkt (än Q) på l, rita en vinkelrät linje t till l genom punkten R samt rita en vinkelrätlinje $\overleftrightarrow{PS}$ till t (Figur 20). Nu kan vi konstatera att $\overleftrightarrow{PS}$ är parallell med l för att de är båda parallella med t (Korollarium 2). Vi hävdar att m och $\overleftrightarrow{PS}$ är olika linjer. Vi antar motsatsen, det vill säga att S ligger på m. Då är PQRS en rektangel och det motsäger lemma 1, vilket betyder att vi har hittat åtminstone två olika linjer som är parallella med l genom punkten P. ■



Figur 20.

Korollarium 3. I hyperbolisk geometri så gäller det att för varje linje l och varje punkt P som inte är på l, så existerar det oändligt många linjer parallella till l genom punkten P.

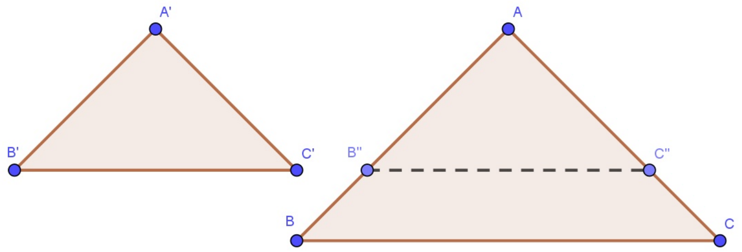
Bevis. Samma bevis som ovan men där man varierar var punkten R ligger på linjen l. ■

4.4.1 Likformiga trianglar

Som nästa steg kommer vi att visa att i den hyperboliska geometrin så existerar det inga likformiga icke-kongruenta trianglar.

Sats 3. *I den hyperboliska geometrin gäller att om två trianglar är likformiga så är de också kongruenta.*

Bevis. Vi antar motsatsen, det vill säga att det existerar trianglar △ABC och △A'B'C' som är likformiga, men inte kongruenta. Detta betyder att inga motsvarande sidor är kongruenta, annars skulle trianglarna vara kongruenta enligt VSV-principen. Vi betraktar tripplarna (AB, AC, BC) samt (A'B', A'C', B'C') av sidorna för trianglarna. En av dessa tripplar måste innehålla åtminstone två segment som är större än de två motsvarande segmenten av den andra trippeln, exempelvis AB>A'B' och AC>A'C'. Då, på grund av definitionen för >, så existerar det punkter B" på AB och C" på AC så att AB" ≅ A'B' och AC" ≅ A'C' (Figur 15). Enligt SVS-principen så är △A'B'C' ≅ △AB"C". Följaktligen så är motsvarande vinklar kongruenta: ∠AB"C" ≅ ∠B' och ∠AC"CB" ≅ ∠C'. Så enligt antagandet är △ABC och △A'B'C' likformiga, vilket leder till att ∠AB"C" ≅ ∠B och ∠AC"B" ≅ ∠C. Detta innebär att $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B''C''}$, och vidare att fyrhörningen BB"C"C är konvex. Det följer också att vinkelsumman av ∠B och ∠BB"C" samt ∠C och ∠CC"B" är 180°. Härifrån följer att vinkelsumman i fyrhörningen BB"C"C är 360°. Detta är en motsägelse enligt korollarium 1 och det betyder att vårt antagandet är felaktigt, vilket innebär att satsen är korrekt. ■



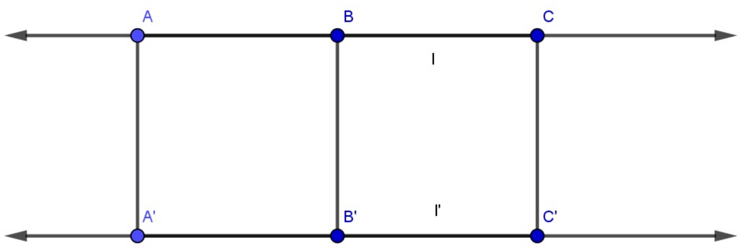
Figur 21. Två trianglar som är likformiga och därmed kongruenta.

Ovanstående sats betyder speciellt att det är omöjligt att förstora eller förminska trianglar utan att de förvrängs i den hyperboliska geometrin.

4.4.2 Paralleller med en gemensam rätvinklig linje

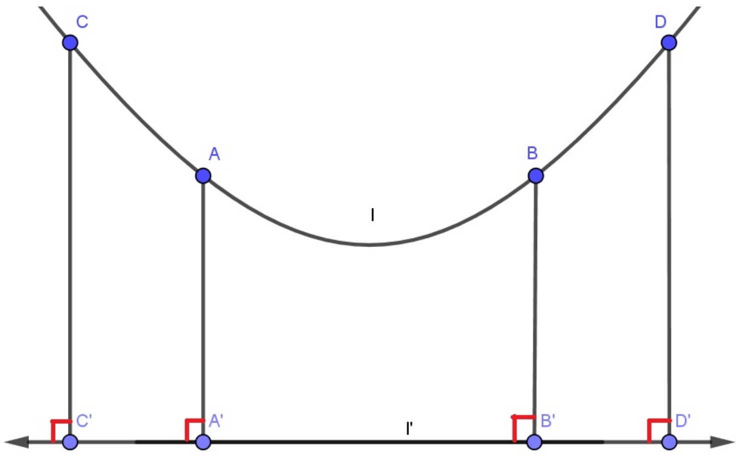
Sats 4. *I den hyperboliska geometrin gäller att om l och l' är vilka som helst parallella och distinkta linjer, så innehåller vilka som helst samlingar av punkter på l som är ekvidistanta, dvs har samma avstånd, från l' högst två punkter.*

Bevis. Vi antar motsatsen, att det finns en samling av tre punkter A, B och C på l som är ekvidistanta från l'. Då existerar det fyrhörningarna A'B'BA, A'C'CA och B'C'CB så att basvinklarna är rätvinkliga och sidorna samt toppvinklarna är kongruenta (Figur 16)(Denna typ av fyrhörning kallas emellanåt för en Saccheri fyrhörning efter den italienska matematikern Giovanni Saccheri (1667-1733)). Det vill säga, det gäller att $\angle$A'AB $\cong$ $\angle$B'BA, $\angle$A'AC $\cong$ $\angle$C'CA och $\angle$B'BC $\cong$ $\angle$C'CB. På grund av transitiviteten så följer det att supplementvinklarna $\angle$B'BA och $\angle$ B'BC är kongruenta och därav enligt definitionen är de rätvinkliga. Således är alla dessa fyrhörningar rektanglar, men rektanglar existerar inte i den hyperboliska geometrin enligt Lemma 1. Denna motsägelse bevisar att A, B och C inte kan vara ekvidistanta från l'.

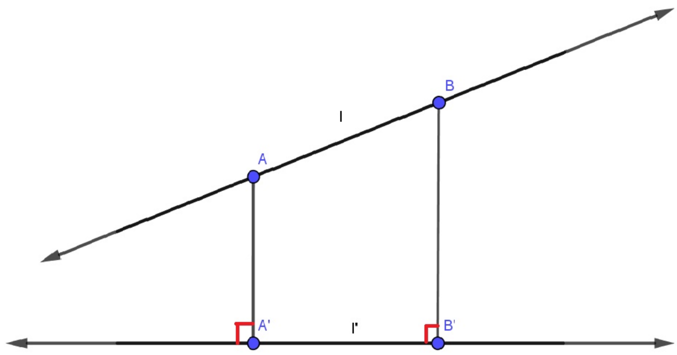


Figur 22.

Satsen säger att högst två punkter på l kan samtidigt vara ekvidistanta från l'. Satsen tillåter möjligheten att det finns många par av punkter (A,B), (C,D), ... på l så att varje par är separat ekvidistanta från punkter på l' (Figur 23). Förutom detta så tillåter satsen också möjligheten att inga par av punkter är ekvidistanta från l'. I figur 24 kan vi se ett exempel på denna möjlighet.



Figur 23. AA'≃BB', CC'≃DD' etc.



Figur 24. Längden av BB' är större än längden av AA'.

För att bevisa nästa sats så behövs det ett nytt lemma.

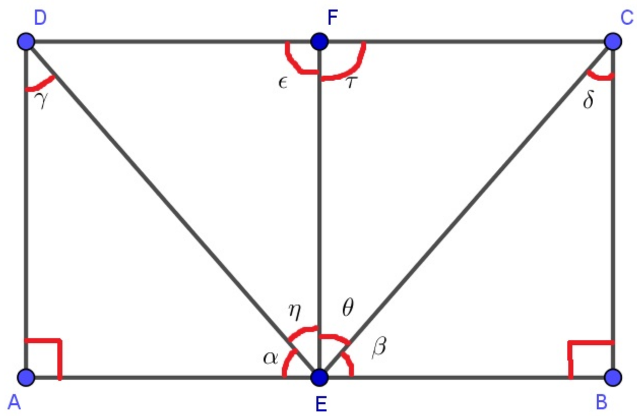
Lemma 2. Segmentet som sammanfogar mittpunkterna av basen och toppen i en Saccheri fyrhörning är vinkelrät mot både basen och toppen samt kortare än sidorna.

Bevis. Vi antar att vi har en Saccheri fyrhörning ABCD. Vi antar också att vi har två punkter E och F som är mittpunkterna på basen respektive toppen (Figur 25). Trianglarna DEA och CEB är kongruenta enligt SVS-principen. Det vill säga $|DE|=|CE|$, $\angle\alpha=\angle\beta$ och $\angle\gamma=\angle\delta$ och därmed är trianglarna CEF och DEF kongruenta enligt SSS-principen. Därmed är $\angle\epsilon=\angle\tau$ och då är båda dessa räta vinklar. Det gäller också att $\angle\eta=\angle\theta$ och därmed gäller det att

$$\angle\alpha + \angle\eta = \angle\beta + \angle\theta = 90°.$$

Därmed är segmentet som sammanfogar mittpunkterna av basen och toppen vinkelrätt mot både basen och toppen.

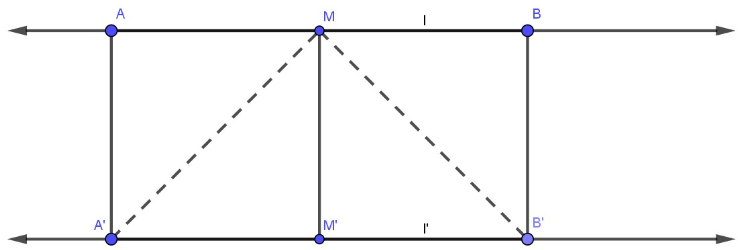
Enligt korollarium 1 så har alla fyrhörningar en vinkelsumma mindre än 360° och därmed måste $\angle ADC$ och $\angle BCD$ vara spetsiga för enligt definitionen på en Saccheri fyrhörning så är toppvinklarna kongruenta sinsemellan. Eftersom $\angle ADC$ samt $\angle BCD$ är spetsiga och $\angle\epsilon$ och $\angle\tau$ är räta vinklar så kan vi bilda Lambert fyrhörningarna AEFD och EBCF. Enligt definition 10 så är de intilliggande sidorna till den spetsiga vinkeln längre än de motstående sidorna i en Lambert fyrhörning och därmed gäller det att $|AD|>|EF|$ och $|BC|>|EF|$ och därmed är segmentet EF kortare än sidorna. ■



Figur 25.

Sats 5. *Anta att l och l' är parallella linjer för vilka det existerar ett par av punkter A och B på l som är ekvidistanta från l'. I den hyperboliska geometrin gäller då att l och l' har en gemensam rätvinklig sträcka som också är den kortaste sträckan mellan linjerna l och l'.*

Bevis. Vi antar att punkterna A och B på linjen l är ekvidistanta från linjen l'. Då är A'B'BA en Saccheri fyrhörning där A' och B' är "fötterna" på l' från den rätvinkliga linjen från A respektive B mot l'. Låt M vara mittpunkten av AB och M' mittpunkten av A'B' (Figur 26). Nu enligt lemma 2 så är denna sträcka MM' den kortaste sträckan mellan linjerna l och l'. ■



Figur 26.

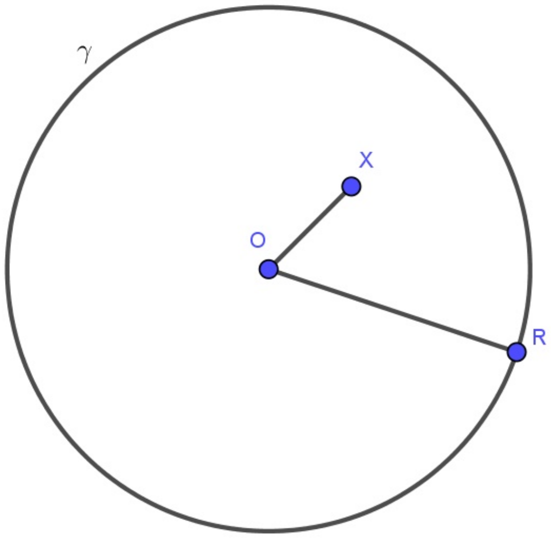
Nu har vi definierat den hyperboliska geometrin och som nästa steg skall vi studera några olika modeller för den hyperboliska geometrin.

5 Modeller för hyperboliska geometrin

I detta kapitel kommer jag först kort gå igenom Felix Kleins (1849-1925) modell för den hyperboliska geometrin och efter detta kommer jag att undersöka närmare Henri Poincarés modeller för den hyperboliska geometrin. Till sist kommer jag att verifiera kongruensaxiomen för Poincarés cirkelmodell genom inversioner i cirklar. Denna verifikation kommer att visa att om Euklidisk geometri är konsistent, så är också hyperbolisk geometri konsistent. Konsistent avser här att systemet inte har motsägelser.

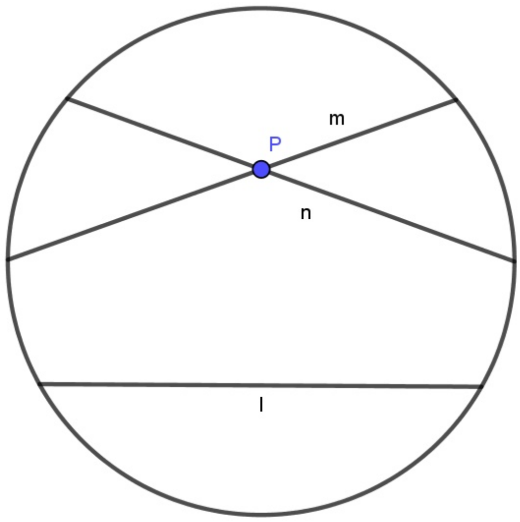
5.1 Kleins modell

Denna modell kallas emellanåt för Beltrami-Klein modellen men jag kommer att hänvisa till denna som Kleins modell. Vi kommer att fixera en cirkel γ i det Euklidiska planet. Om O är mittpunkten i γ och R är en punkt på cirkelns periferi så är OR cirkelns radie. Cirkeln innesluter enligt definitionen alla sådana punkter X som för det gäller att längden av sträckan OX är mindre än längden av sträckan OR (Figur 27). I Kleins modell repsenterar punkterna X det hyperboliska planet.



Figur 27.

Jag påminner att en korda till γ är en rät "linje" som sammanbinder två punkter på cirkelbågen av γ. Om vi "glömmer" ändpunkterna A och B för kordan så talar vi om en öppen korda och betecknar denna med A)(B. I Kleins modell representerar alla öppna kordor av γ linjerna i det hyperboliska planets. Men gäller det hyperboliska axiomet i denna modell? Vi kan se från figur 28 att det hyperboliska axiomet gäller också i Kleins modell.



Figur 28.

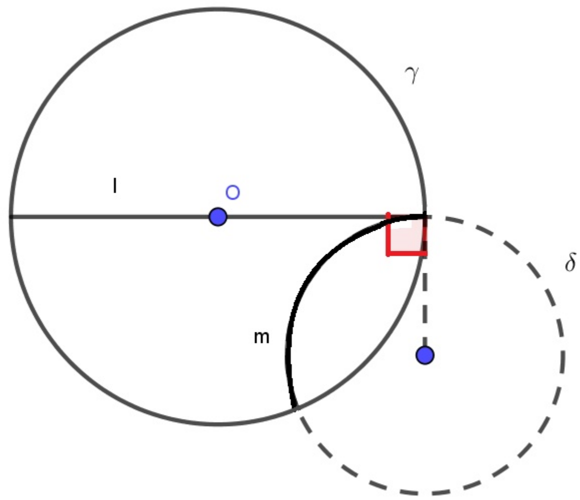
I figur 28 är de två öppna kordorna m och n, som går genom punkten P, parallella med den öppna kordan l. Definitionen för parallellitet i denna hyperboliska modell säger att två linjer är parallella om de har inga gemensamma punkter. I Kleins modell omskrivs denna definition till följande form: två öppna kordor är parallella om de har inga gemensamma punkter. Det vill säga det enda som ändrar jämfört med Euklides modell är att man ersätter "linje" med "öppen korda". Faktumet att kordorna kan mötas utanför cirkeln γ om kordorna förlängs är irrelevant eftersom punkter som ligger utanför γ inte är punkter i det hyperboliska planet.

5.2 Poincarés modeller

I detta delkapitel går jag igenom modeller för den hyperboliska geometrin som är skapade av den franska matematikern Henri Poincaré (1854-1912).

5.2.1 Cirkelmodellen

I denna modell definierar vi det hyperboliska planet likadant som i Kleins modell, det vill säga punkterna innanför en cirkel γ i det Euklidiska planet. Skillnaden mellan dessa modeller uppkommer i definitionen på en linje. Alla öppna kordor som passerar genom mittpunkten O av cirkeln γ (med andra ord alla öppna diametrar l till γ) representerar linjer. Dessutom representerar också alla öppna cirkelbågar som är vinkelräta mot γ linjer i Poincarés cirkelmodell. Det vill säga låt δ vara en cirkel som är vinkelrät till γ i alla skärningspunkter mellan δ och γ samt att radierna för γ och δ är vinkelräta i dessa punkter. Då ger den inresidan av snittet av δ och γ en öppen cirkelbåge m. Vi kallar både den öppna diametern l till γ och den öppna cirkelbågen m för en Poincaré linje (Figur 29).



Figur 29. Poincaré linjerna l och m.

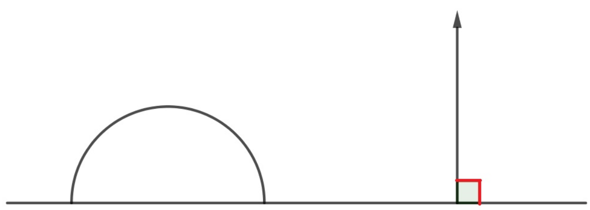
Tolkningen av hur man skall mäta längderna för denna modell är komplicerad och vi kommer därför inte att kommentera detta desto mera än att det är annorlunda än den normala Euklidiska längderna. En stor fördel med Poincarés modell, i jämförelse med Kleins modell, är att vinkelstorlekarna är de samma som i det Euklidiska planet.

5.2.2 Halvplansmodellen

I denna modell repsenteras punkterna i det hyperboliska planet av punkterna på ett Euklidiskt halvplan som är bestämda av en fixerad Euklidisk linje. Om vi använder oss av den kartesiska modellen för det Euklidiska planet så är det vanligt att man använder x-axeln som den fixerade linjen samt det övre halvplanet som innehåller alla punkter (x,y) där $y>0$. I denna modell definieras hyperboliska linjer på två olika sätt (Figur 30):

1. Strålar som utgår från punkter på x-axeln och är vinkelräta mot x-axeln.

2. Halvcirklar i det övre halvplanet vars mittpunkt ligger på x-axeln.

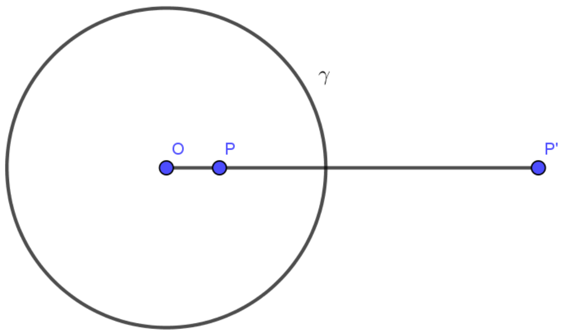


Figur 30. Hyperboliska linjerna i Poincarés halvplansmodell.

5.3 Verifiering av kongruensaxiomen för cirkelmodellen

För att definiera kongruensbegreppet i Poincarés cirkelmodell samt verifiera kongruensaxiomen så måste vi betrakta inversioner av den Euklidiska cirkeln. Vi börjar med att bevisa en del nödvändiga satser före vi kan ta itu med verifieringen av kongruensaxiomen.

Definition 11. Låt γ vara en Euklidisk cirkel med radien r och mittpunkten O. För alla punkter P$\neq$O så är inversen P' den unika punkt på strålen $\overrightarrow{OP}$, så att |OP|·|OP'|=r^2. (Figur 31)



Figur 31.

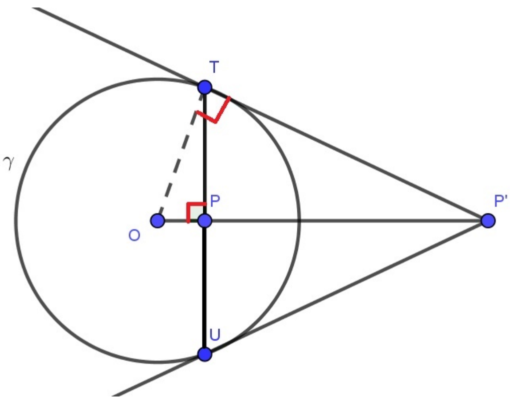
Från definitionen följer följande egenskaper för inversion:

Sats 6. *(a) P=P' om och endast om P ligger på cirkeln γ.*
(b) Om P ligger innanför γ, så ligger P' utanför γ och vice versa.
(c) (P')'=P.

De två följande satserna beskriver hur man kan konstruera inverspunkten med linjal och passare.

Sats 7. *Anta att P ligger innanför γ. Låt TU vara en korda genom punkten P som är vinkelrät mot $\overleftrightarrow{OP}$. Då är inverspunkten P' den punkt där tangenterna för γ, som går genom U respektive T, sammanträffar (Figur 32). (Punkten P' kan också kallas för en polpunkt.)*

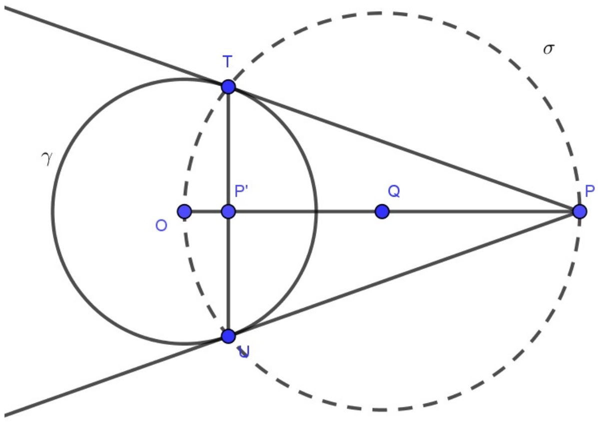
Bevis. Anta att tangenten för γ i punkten T skär strålen $\overrightarrow{OP}$ i punkten P'. Den rätvinkliga triangeln OPT är likformig med den rätvinkliga triangeln OTP' eftersom de har en gemensam vinkel ∠TOP förutom den räta vinkeln. Därav följer det att de motsvarande sidorna är proportionella. Eftersom |OT|=r så får vi att |OP|\r = r\|OP'|, vilket visar att P' är inversen till P. Genom att spegla över $\overleftrightarrow{OP}$ så märker vi att tangenten för γ i punkten U också går genom P', det vill säga P' är polpunkten till TU. ■



Figur 32.

Sats 8. *Vi antar att P ligger utanför γ, samt låter Q vara mittpunkten av segmentet OP. Vi antar att vi har en cirkel σ med mittpunkten Q och radien OQ=QP. Då skär σ cirkeln γ i punkterna T och U, $\overleftrightarrow{PT}$ och $\overleftrightarrow{PU}$ är tangenter till γ och inversen P' är skärningspunkten av TU och OP. (Figur 33)*

Bevis. Vi vet av cirkelns egenskaper att två cirklar som skär varandra, som σ och γ, har två skärningspunkter som vi kallar T och U. Eftersom $\angle$OTP och $\angle$OUP är inskrivna i halvcirklar av σ så är de räta vinklar och därav är $\overleftrightarrow{PT}$ och $\overleftrightarrow{PU}$ tangenter till γ. Om TU skär OP i punkten P', så är P inversen av P' (Sats 7) och därav gäller det att P' är inversen av P i γ enligt Sats 6(c). ■

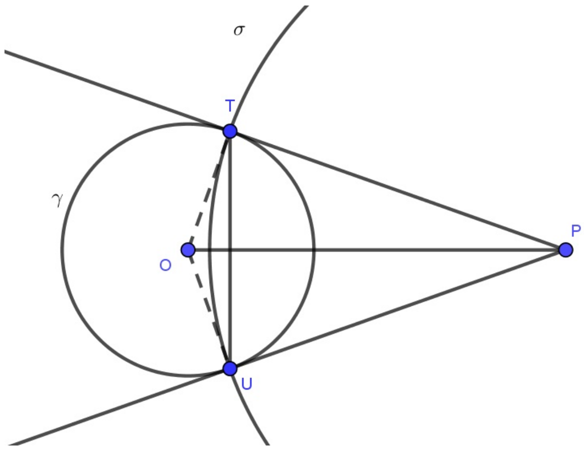


Figur 33.

Nästa sats visar hur vi kan konstruera en Poincaré linje som sammanbinder två punkter.

Sats 9. *Låt T och U vara punkter på γ som inte är diametralt motsatta och låt P vara polpunkten till TU. Då är PT $\cong$PU, $\angle$PTU$\cong$ $\angle$PUT, $\overleftrightarrow{OP}\perp\overleftrightarrow{TU}$ och cirkeln δ med mittpunkten P och radien |PT|, där |PT|=|PU|, skär γ rätvinkligt i punkterna T och U. (Figur 34)*

Bevis. Enligt definitionen på en polpunkt är $\angle$OTP och $\angle$OUP rätvinkliga och därav gäller det också att trianglarna OTP och OUP är kongruenta (rätvinkliga trianglar med en gemensam hypotenusa). Således är PT$\cong$PU och $\angle$OPT$\cong$ $\angle$OPU. Basvinklarna $\angle$PTU och $\angle$PUT av den likbenta triangeln TPU är kongruenta och bisektrisen $\overrightarrow{PO}$ är vinkelrät mot basen TU. Cirkeln δ är i så fall definierad eftersom |PT|=|PU|, och δ skär γ vinkelrätt i punkterna T och U. ■



Figur 34.

Lemma 3. Anta att punkten O inte ligger på cirkeln δ. Då gäller följande:
(a) Om två linjer som går genom O korsar δ i punkterna (P_1, P_2) och (Q_1, Q_2) så är

$$|OP_1| \cdot |OP_2| = |OQ_1| \cdot |OQ_2|.$$

Denna produkt kallas emellanåt för punktens O potens gentemot δ när O ligger utanför δ. Om punkten O ligger innanför δ så byts förtecknet för produkten till negativt.

$$|OP_1| \cdot |OP_2| = -|OQ_1| \cdot |OQ_2|.$$

(b) Om O ligger utanför δ och en tangent till δ från O skär δ i punkten T så är $|\mathrm{OT}|^2$ punktens O potens gentemot δ.

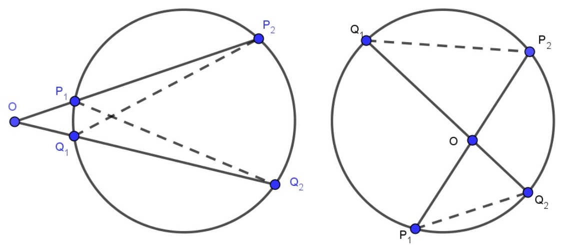
Bevis. (a) Eftersom vinklar som är inskrivna i en cirkel och har samma cirkelbåge är kongruenta så har vi att:

$$\angle P_2P_1Q_2 \cong \angle P_2Q_1Q_2$$
$$\angle P_1Q_2Q_1 \cong \angle P_1P_2Q_1$$

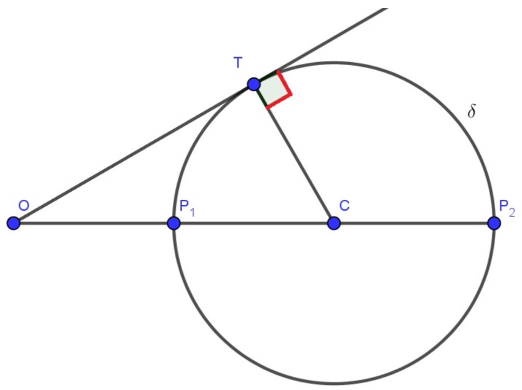
(Figur 35). Från detta följer det också att trianglarna OP_1Q_2 och OQ_1P_2 är likformiga, det vill säga $\frac{|OP_1|}{|OQ_1|} = \frac{|OQ_2|}{|OP_2|}$ så att $|\mathrm{O}P_1| \cdot |\mathrm{O}P_2| = |\mathrm{O}Q_1| \cdot |\mathrm{O}Q_2|$.
(b) Låt C vara mittpunkten av δ och låt linjen OC skära δ i punkterna P_1 och P_2. Enligt Pythagoras sats:

$$\begin{aligned}|OT|^2 &= |OC|^2 - |CT|^2 \\ &= (|OC| - |CT|) \cdot (|OC| + |CT|) \\ &= (|OC| - |CP_1|) \cdot (|OC| + |CP_2|) \\ &= |OP_1| \cdot |OP_2|\end{aligned}$$

(Figur 36). ■



Figur 35.

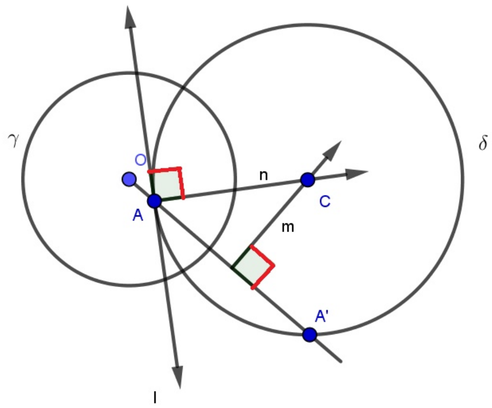


Figur 36.

Sats 10. *Anta att P är vilken som helst punkt som inte ligger på cirkeln γ och som inte sammanfaller med mittpunkten O till γ. Vi antar också att vi har cirkel δ som går genom punkten P. Då gäller det att δ skär γ vinkelrätt om och endast om δ går genom punktens P inversa punkt P' med avseende på γ.*

Bevis. Vi antar först att δ går genom P'. Då gäller det att mittpunkten C av δ ligger på den vinkelräta linjen gentemot PP' och således är |CO|>|CP| samt att O ligger utanför δ. Därav gäller det att det finns en punkt T på δ så att tangenten till δ i punkten T går genom punkten O (sats 8).
Lemma 3(b) ger då att $|OT|^2=|OP|\cdot|OP'|=r^2$ så T ligger på γ och δ skär γ vinkelrätt.
Vi antar att δ skär γ vinkelrätt i punkterna T och U. Då gäller det att tangenterna till δ i punkterna T och U korsar varandra i punkten O så att O ligger utanför δ. Från detta följer det att $\overrightarrow{OP}$ skär δ i punkten Q. Enligt lemma 3(b) så är $r^2=|OT|^2=|OP|\cdot|OQ|$, så att Q=P' är inversen av P i γ. ■

Låt oss nu titta närmare på kongruensaxiomen K1-K6. Vi börjar med att betrakta kongruensaxiomet K-5 som säger följande: ”Om $\angle A \cong \angle B$ och $\angle A \cong \angle C$ så gäller det att $\angle B \cong \angle C$. Det gäller också att varje vinkel är kongruent till sig själv.”
Eftersom vinklarna mäts i Poincaré modellerna på samma sätt som i den Euklidiska geometrin så bibehålls också transitiviteten för vinklarna. Därmed är kongruensaxiomet K-5 satisfierat.
Vi betraktar härefter kongruensaxiomet K-4, det vill säga axiomet som säger att det kan skapas en kongruent kopia av en given vinkel i ändpunkten A. Om A är mittpunkten i cirkeln γ, så bildas vinkeln av två olika diametrar och då ligger dess kongruenta kopia på andra sidan av den skapade vinkeln med avseende på punkten A. Om punkten A inte är mittpunkten O av γ så verifieras axiomet genom att hitta en unik cirkel δ som går genom punkten A och är vinkelrät till γ. Dessutom bör man hitta en tangent till en given Euklidisk linje l som går genom punkten A men inte genom O. Enligt sats 10 måste δ gå genom punkten A' som är inversen av A med avseende på γ. Mittpunkten C av δ måste ligga på den vinkelräta linjen mot kordan A'A. Vi kallar denna linje för m. Om δ är tangenten till l i punkten A så måste C ligga på den vinkelräta linjen n mot l i punkten A. Det vill säga δ måste vara en cirkel med mittpunkten C som är skärningspunkten av m och n och cirkelns radie är CA (figur 37). Därmed är kongruensaxiomet K-4 satisfierat.



Figur 37.

För att verifiera kongruensen av segment i cirkelmodellen så introducerar vi följande definition av längd:

Definition 12. Låt A och B vara punkter innanför cirkeln γ samt låt P och Q vara ändpunkterna för Poincaré linjen genom punkterna A och B. Vi definerar korsförhållandet (AB, PQ) som:

$$(AB, PQ) = \frac{|AP| \cdot |BQ|}{|BP| \cdot |AQ|}$$

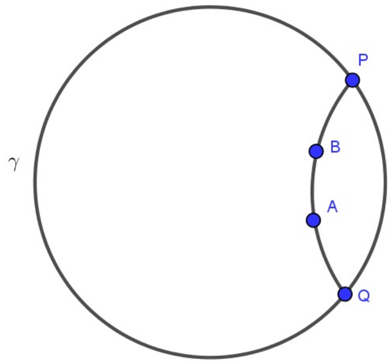
där |AP|, |BQ|, ... är den Euklidiska längden av de Euklidiska segmentena AP, BQ, ...Därefter definierar vi Poincaré längden d(AB) som:

$$d(AB) = |\log(AB, PQ)|.$$

Vi märker att denna längd inte är beroende av i vilken ordning vi skriver P och Q för exempelvis om (AB, PQ) = x så är (AB, QP) = 1/x och |log (1/x)| = |-log x| = |log x|. Eftersom (AB, PQ) = (BA, QP) följer det också att d(AB) inte är beroende av i vilken ordning vi skriver A och B. Vi kan därför tolka att Poincaré segmentena AB och CD är Poincaré kongruenta om d(AB) = d(CD). Därmed är <u>kongruensaxiomet K-2 satisfierat</u>, som säger att ”Om AB≅CD och AB≅EF, så gäller det att CD≅EF. Det gäller också att varje segment är kongruent till sig själv.”

Som nästa steg verifierar vi kongruensaxiomet K-1, som säger att ”Om A och B är distinkta punkter och om A’ är vilken som helst punkt så gäller det att för varje stråle r, som har sin startpunkt i A’, finns det en unik punkt B’ på r så att B’≠A’ och AB≅A’B’.”

Anta att vi fixerar punkten A på Poincaré linjen från P till Q och låter punkten B röra sig kontinuerligt från punkten A till P som i figur 38. Korsförhållandet (AB, PQ) kommer att öka kontinuerligt från 1 till ∞ eftersom $\frac{|AP|}{|AQ|}$ är konstant, |BP| närmar sig noll och |BQ| närmar sig |PQ|. Om vi fixerar punkten B och låter punkten A i stället röra sig kontinuerligt från B till Q så får vi samma resultat. Från detta följer det att för alla Poincaré strålar $\overrightarrow{CD}$ så existerar det en unik punkt E på $\overrightarrow{CD}$ så att d(CE)=d(AB), där A och B är givna i förväg. Därmed är kongruensaxiomet K-1 satisfierat.



Figur 38.

Efter detta verifierar vi kongruensaxiomet K-3, det vill säga axiomet som säger att om A, B och C ligger på samma linje, A', B', C' ligger på samma linje, AB $\cong$ A'B' och BC $\cong$ B'C' så gäller det att AC $\cong$ A'C'. Axiomet satisfieras om vi kan bevisa att Poincaré längder är additiva. Detta betyder att om A, C och B ligger på samma linje i cirkelmodellen så gäller det att d(AC) + d(CB) = d(AB).

Bevis. För att bevisa additiviteten så ordnar vi punkterna i ordningen Q, A, C, B och P. Detta betyder att korsförhållandena (AB, PQ), (AC, PQ) och (CB, PQ) är alla större än 1 eftersom |AP|>|BP|, |BQ|>|AQ| osv. .Vi behöver inte ta i beaktande absolutbelopperna för alla logaritmer är positiva då talen är större än ett. Då gäller det att:

$$\begin{aligned} d(AC) + d(CB) &= \log(AC, PQ) + \log(CB, PQ) \\ &= \log[(AC, PQ)(CB, PQ)]. \end{aligned}$$

Eftersom (AC, PQ)(CB, PQ) = (AB, PQ) så följer det att

$$\log[(AC, PQ)(CB, PQ)] = \log(AB, PQ) = d(AB).$$

Det vill säga d(AC) + d(CB)= d(AB).■

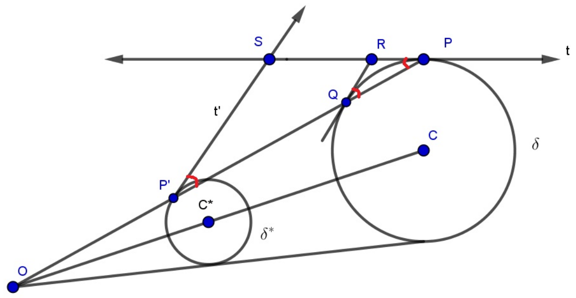
Därmed är kongruensaxiomet K-3 satisfierat.
Till sist verifierar vi kongruensaxiomet K-6, som säger ”Om två sidor och den mellanliggande vinkeln av en triangel är kongruenta till två sidor och den mellanliggande vinkel av en annan triangel så är de två trianglarna kongruenta.” För att göra detta så måste vi studera effekten av inversionerna på cirklarna samt alla relationer inom cirkelmodellen. Vi börjar med en ny definition.

Definition 13. Låt O vara en punkt och k ett positivt tal. Utvidgningen från punkten O med förhållandet k är transformationen från det Euklidiska planet som fixerar punkten O och avbildar varje punkt P≠O till en unik punkt P* på linjen $\overrightarrow{OP}$ så att |OP*|=k|OP|.

Lemma 4. Anta att vi betraktar en cirkel δ med mittpunkten C och radien s. Vi antar också att C≠O. Under utvidgningen från punkten O med förhållandet k så avbildas δ till cirkeln δ^* med mittpunkten C* och radien ks. Om Q är en punkt på δ så är tangenten till cirkeln δ i punkten Q parallell med tangenten till cirkeln δ^* i punkten Q*.

Bevis. Vi väljer att använda kartesiska koordinater med O som origo. Då gäller det att utvidgningen anges av uttrycket (x, y) → (kx, ky). Utvidgningen av en linje som har ekvationen ax + by = c är en linje som har ekvationen k(ax + by) = kc. Därmed är utvidgningen och linjen parallella sinsemellan. Detta betyder att $\overleftrightarrow{CQ}$ är parallell med $\overleftrightarrow{C^*Q^*}$ och deras vinkelräta linjer i punkterna Q och Q* är också parallella. Om δ har ekvationen $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = s^2$ så har δ^* ekvationen $(x - kc_1)^2 + (y - kc_2)^2 = (ks)^2$, från vilket lemmat följer direkt. ■

Sats 11. *Anta att vi betraktar en cirkel γ med mittpunkten O och radien r samt en cirkel δ med mittpunkten C och radien s. Dessutom antar vi att punkten O ligger utanför δ och låter p vara potensen av O med avseende på δ. Låt $k = r^2/p$. Då gäller det att bilden γ^* av γ är en cirkel med radien ks och vars mittpunkt är bilden C* av C under utvidgningen från O med förhållandet k. Om P är vilken som helst punkt på δ and P' är dess invers på γ så gäller det att tangenten t' till δ' i punkten P' är reflektionen över den vinkelräta bisektrisen av PP' av tangenten till δ i punkten P (Figur 39).*



Figur 39.

Bevis. Eftersom O är utanför δ så betyder det att $\overrightarrow{OP}$ skär δ i en annan punkt Q eller så är den en tangent till δ i punkten P. I detta fall låt Q=P. Då gäller det att:

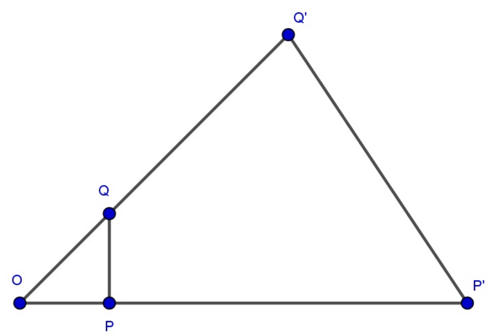
$$\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OP'|}{|OQ|} \cdot \frac{|OP|}{|OP'|} = \frac{r^2}{p},$$

vilket visar att P' är bilden av Q under utvidgningen från O med förhållandet k=r^2/p. Därav gäller det att δ*=δ'. Nu enligt lemma 4 så är tangenten t' till δ' i punkten P parallell med tangenten u till δ i punkten Q. Låt t vara tangenten till δ i punkten P. Enligt sats 9 så möts t och u i punkten R så att ∠RQP≅ ∠RPQ. Det gäller också att t och t' möts i punkten S så att ∠SP'P≅ ∠SPP'. Eftersom triangelns PSP' basvinklar är kongruenta så är den en likbent triangel och eftersom S ligger på den vinkelräta bisektrisen PP' så gäller det att t' är reflektionen av t genom den vinkelräta bisektrisen. ■

Korollarium 4. Cirkeln δ är vinkelrät till cirkeln γ om och endast om δ avbildas till sig själv av en inversion i γ.

Bevis. Om δ är vinkelrät till γ och P ligger på δ så gäller det att p=|OP|·|OP'|=r^2 (Sats 10 och lemma 3) om O är mittpunkten till γ, det vill säga k=1 och δ=δ'. Å andra sidan om δ=δ' så är p=r^2 och δ går genom inversen P' av P i γ, så enligt Sats 10 så är δ vinkelrät gentemot γ. ■

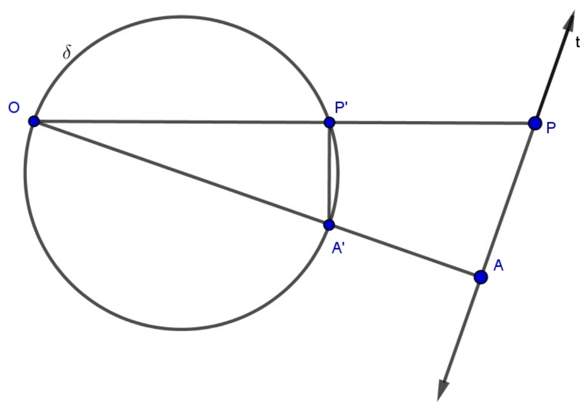
Lemma 5. Anta att O är mittpunkten för cirkeln γ. Anta också att vi betraktar punkter P och Q så att O inte ligger på linjen genom P och Q samt att P' och Q' är deras respektive inverser i γ. Då gäller det att triangeln POQ är likformig i den hyperboliska modellen med triangeln Q'OP' (Figur 40).



Figur 40.

Bevis. Trianglarna har en gemensam vinkel $\angle$POQ och $|OP|\cdot|OP'|=r^2=|OQ|\cdot|OQ'|$. Således gäller Sida-vinkel-sida principen och trianglarna är likformiga. ■

Sats 12. *Anta att vi har givet en linje t som inte går genom mittpunkten O av cirkeln γ. Speglingen av t under inversionen i γ är en punkterad cirkel δ som saknar punkten O. Den förlängda diametern genom O av den fullständiga cirkeln δ är vinkelrät gentemot t (Figur 41).*



Figur 41.

Bevis. Låt A vara basen av den vinkelräta linjen från O till t, P vara vilken som helst punkt på t och A' och P' deras respektive inverser i γ. Enligt lemma 5 så är trianglarna OP'A' och OAP likformiga och därmed gäller det att $\angle$OP'A' är rätvinklig och således måste P' ligga på cirkeln δ och har OA' som sin diameter. Å andra sidan, betrakta vilken som helst punkt P' på δ som är olika O och låt $\overrightarrow{OP'}$ skära t i punkten P. Genom att utföra ovanstående argument i motsatt riktning så får vi att P' är inversen av P i γ och därmed är satsen bevisad. ■

Sats 13. *Anta att vi betraktar cirkeln δ som går genom mittpunkten O av cirkeln γ. Speglingen av δ förutom O under inversionen i γ är en linje t som inte går genom O och där t är parallell med tangenten till δ i O.*

Bevis. Vi antar att vi har en punkt A' på δ som är diametralt mittemot O samt låt A vara dess invers i γ. Vi antar också att t är vinkelrät mot $\overleftrightarrow{OA}$ i punkten A (Figur 41). Enligt beviset för sats 12 så avbildar inversionen i γ linjen t till δ förutom O och enligt sats 6 (c) så måste δ förutom O avbildas till t. ■

Som nästa steg kommer vi att visa att också reflektioner bland inversionerna behåller sina respektive storlekar men att de vänder om vinklarna såsom det sker när man speglar Euklidiska linjer.

Sats 14. *En riktad vinkel av två cirklar som skär varandra behåller sina storlekar men de är omvända när man gör en inversion. Det samma händer med skärningsvinkeln för en cirkel och en linje samt skärningsvinkeln för två linjer.*

Bevis. Vi antar att cirklarna δ och σ skär varandra i punkten P och deras respektive tangenter i denna punkt är l och m. Låt P' vara inversen av P i γ och låt δ' samt σ' vara reflektionerna av δ och σ under inversionen i γ. Låt också l' samt m' vara deras respektive tangenter i punkten P'. Det första påståendet följer från att l' och m' är reflektioner av l och m genom den vinkelräta bisektrisen PP' (Sats 11). De två följande påståendena följer direkt från satserna 12 och 13. ■

Följande sats visar att inversionerna också bevarar korsförhållandet som vi definerade Poincaré längden med.

Sats 15. *Om A, B, P och Q är distinkta punkter på cirkeln γ med mittpunkten O och A', B', P' och Q' är deras respektive inverser i γ så gäller det att (AB, PQ) = (A'B', P'Q').*

Bevis. Enligt lemma 5 så gäller det att |AP|/|OA|=|A'P'|/|OP'| och |AQ|/|OA|=|A'Q'|/|OQ'| och därav följer:

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|AP|}{|OA|} \cdot \frac{|OA|}{|AQ|} = \frac{|OQ'|}{|OP'|} \cdot \frac{|A'P'|}{|A'Q'|} \quad (1)$$

samt att,

$$\frac{|BQ|}{|BP|} = \frac{|OP'|}{|OQ'|} \cdot \frac{|B'Q'|}{|B'P'|}. \quad (2)$$

Genom att multiplicera ekvationerna (1) och (2) får vi att:

$$\begin{aligned}(AB, PQ) &= \frac{|AP| \cdot |BQ|}{|AQ| \cdot |BP|} \\ &= \frac{|OQ'|}{|OP'|} \cdot \frac{|A'P'|}{|A'Q'|} \cdot \frac{|OP'|}{|OQ'|} \cdot \frac{|B'Q'|}{|B'P'|} \\ &= \frac{|A'P'|}{|A'Q'|} \cdot \frac{|B'Q'|}{|B'P'|} \\ &= (A'B', P'Q'). \blacksquare\end{aligned}$$

Sats 16. *Anta att vi betraktar en cirkel δ som är vinkelrät mot en annan cirkel γ. Då avbildar inversionen i δ cirkeln γ till γ samt avbildar de inre punkterna av γ till sig själv. Inversionen i δ bevarar incidensen, ordningen samt kongruensen i Poincarés cirkelmodell innanför γ.*

Bevis. Korollarium 5 säger oss att cirkeln γ avbildas till sig själv. Anta nu att P är en punkt som är innanför γ och att P' är dess invers i δ. Låt C vara mittpunkten av δ och låt δ ha radien s. Låt $\overrightarrow{CP}$ skära γ i punkten Q och Q'. Enligt sats 10 är

$$|CQ| \cdot |CQ'|) = s^2 = |CP| \cdot |CP'|.$$

Eftersom P ligger mellan Q och Q' så gäller det att |CQ|<|CP|<|CQ'|. Då gäller det också att

$$s^2/|CQ| > s^2/|CP| > s^2/|CQ'|,$$

som är detsamma som |CQ'|>|CP'|>|CQ| enligt sats 10. Därav gäller det att P' också ligger mellan Q och Q' och därmed innanför γ.
Enligt satserna 11, 13 och 14 så avbildar inversionen i δ vilken som helst cirkel σ, som är vinkelrät mot γ, till antigen en annan cirkel σ', som är vinkelrät mot γ, eller till en linje σ', som är vinkelrät mot γ. Självklart avbildas linjen σ, som sammanbinder punkterna O (mittpunkten för γ) och C, till sig själv och vilken som helst annan linje σ genom O avbildas till en cirkel σ' som går genom punkten C och är vinkelrät mot γ (satserna 12 och 14). I alla scenarier som beskrivits ovan visar det sig att de delar av σ som ligger innanför γ avbildas till den del av σ' som ligger innanför γ'. Därav gäller det att Poincaré linjer avbildas till Poincaré linjer.
Om punkterna A och B ligger innanför γ och punkterna P och Q är ändpunkterna för Poincaré linjerna genom A och B så gäller det att inversionen av δ avbildar punkterna P och Q till ändpunkterna för Poincaré linjerna genom A' och B'. Enligt sats 15 så gäller det att d(AB)=d(A'B') och därmed bevaras kongruensen av segmenten. Sats 14 säger att kongruensen av vinklar är bevarad. Dessutom bevaras Poincaré ordningen eftersom B ligger mellan A och D om och endast om A, B och D ligger på samma linje och d(AD)=d(AB)+d(BD). ■

Lemma 6. Om d(OB)=d så gäller det att

$$|OB| = r(e^d - 1)/(e^d + 1),$$

där e är basen av den naturliga logaritmen och r är radien av cirkeln γ.

Bevis. Anta att P och Q är ändpunkterna av diametern till γ genom punkten B så att diametern går genom punkterna i ordningen Q, O, B, P. Då gäller det att d=log(OB, PQ). Genom att exponentiera båda lederna så får vi att:

$$e^d = (OB, PQ) = \frac{|OP|}{|OQ|} \cdot \frac{|BQ|}{|BP|} = \frac{|BQ|}{|BP|} = \frac{r + |OB|}{r - |OB|}.$$

Genom att lösa ekvationen ovan för |OB| så får vi att

$$|OB| = r(e^d - 1)/(e^d + 1). \blacksquare$$

Vi har nu alla ingredienser för att också verifiera det sista kongruensaxiomet, det vill säga kongruensaxiomet K-6.

Anta att vi har två Poincaré trianglar ABC och XYZ innanför γ så att $\angle$A$\cong$ $\angle$X, d(AC)=d(XZ) och d(AB)=d(XY) (Figur 42). Vår uppgift är att bevisa att dessa trianglar är Poincaré kongruenta. Vi förenklar fallet såvida att A=X=O (mittpunkten av γ).

Anta att δ är den cirkel som är vinkelrät till γ genom punkterna A och B samt att cirkeln σ är vinkelrät till γ genom punkterna A och C. Cirkeln δ möter σ i punkten A' utanför γ som inversen av A i γ (sats 10). Låt ε vara cirkeln med mittpunkten i A' och med radien s, där

$$s^2 = |AA'| \cdot |A'O|.$$

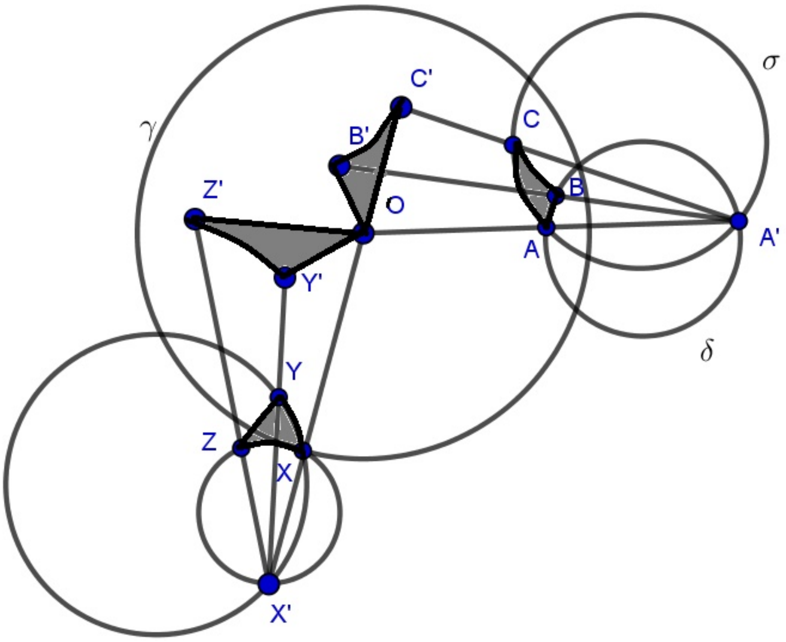
Eftersom |AA'|=|A'O|-|AO| så gäller det att

$$s^2 = |A'O|^2 - |AO| \cdot |A'O| = |A'O|^2 - r^2,$$

där r är radien av γ.
Denna ekvation bevisar att ε är vinkelrät till γ (Pythagoras sats). Enligt definitionen av ε är O inversen av A i ε och enligt sats 16 så avbildar inversionen i ε Poincaré triangeln ABC till den Poincaré kongruenta Poincaré triangeln AB'C'.
På samma sätt kan Poincaré triangeln XYZ avbildas med inversion till den Poincaré kongruenta Poincaré triangeln OY'Z' (Figur 42). Enligt lemma 6 och antagandet i K-6 får vi att:

$$|OB| = |OY|, |OC| = |OZ| \text{ och } \angle BOC \cong \angle YOZ.$$

Därav, med en lämplig Euklidisk rotation, som kombineras ifall nödvändigt, med en spegling över diametern så kommer den Euklidiska triangeln OBC att avbildas till den Euklidiska triangeln OYZ. Denna transformation avbildar γ till sig själv och den vinkelräta cirkeln genom B och C till den vinkelräta cirkeln genom Y och Z samtidigt som den bevarar Poincaré längden och vinkelstorlekarna. Därav följer det att Poincaré trianglarna OBC och OYZ är Poincaré kongruenta. ■
Därmed är kongruensaxiomet K-6 satisfierat.



Figur 42.

Eftersom vi har kunnat bevisa kongruensaxiomen för Poincarés cirkelmodell med hjälp av den Euklidiska geometrin så vet vi att Poincarés cirkelmodell existerar och eftersom modellen existerar måste så systemet vara konsistent. Med ett konsistent system avses här ett system som har inga motsägelser.

5.4 Konsistensen av den Hyperboliska geometrin

Fastän vi har kunnat bevisa att den Hyperboliska geometrin är konsistent så kan det kännas som att det grundläggande antagandet - det hyperboliska axiomet - redan är felaktigt. På grund av att geometri inte handlar om linjer som vi kan rita utan om ideala linjer som begrepp så kan vi endast utföra tankeexperiment på dessa linjer. Frågan vi kan ställa oss är att: Kan vi föreställa oss en icke-Euklidisk geometri? Endel personer som t.ex. Immanuel Kant (1724-1804) som var en tysk filosof sade att det är omöjligt att föreställa sig någon annan geometri än den Euklidiska.

Nu för tiden vet vi så klart att den Hyperboliska geometrin är konsistent. Men om någon av herrarna Saccheri, Bolyai, Gauss eller någon av de andra forskarna kunnat bevisa parallellpostulatet från de andra postulaten med den ädla avsikten att göra Euklidiska geometrin mera elegant så skulle de ha förstört hela den Euklidiska geometrin (och därmed också den Hyperboliska geometrin). Eftersom herrarna aldrig lyckades bevisa parallellpostulatet med hjälp av de andra postulaten och det har bevisats att parallellpostulatet är totalt oberoende av de andra postulaten samt när flera matematiker, som Felix Klein och Eugenio Beltrami, har bevisat att den Hyperboliska geometrin också är konsistent så kan vi konstatera att vi kan föreställa oss en icke-Euklidisk geometri fastän det kan vara svårt att rita den.

Det vill säga kort och koncist så om den Euklidiska geometrin är konsistent så är den Hyperboliska geometrin det också. Därav följer det att det kan aldrig hittas ett bevis av att parallellpostulatet skulle vara oberoende av de andra postulaten.

Referenser

[1] Marvin Jay Greenberg: Euclidean and Non-Euclidean geometries, 3rd edition, W. H. Freeman, 1993.

[2] http://mathed.byu.edu/ williams/Classes/362F2006/Notes/
Equivalents%20to%20the%20Euclidean%20Parallel%20Postulate.pdf
(hämtad 07.04.2018)

[3] http://matmin.kevius.com/geoaxiom.php
(hämtad 07.04.2018)

[4]
https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/27299/1/gupea_2077_27299_1.pdf
(hämtad 07.04.2018)

[5] http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/LMA100/V06-2B/geom.pdf
(hämtad 07.04.2018)

[6] http://raider.mountunion.edu/ma/maendel.pdf
(hämtad 07.04.2018)

[7] http://www2.math.uu.se/~lal/kompendier/Geometribok.pdf
(hämtad 07.04.2018)

[8] http://documents.kenyon.edu/math/atwell.pdf
(hämtad 07.04.2018)

[9] http://users.abo.fi/npalmber/matematik/fk-examen.pdf
(hämtad 07.04.2018)

[10]
http://www.evlm.stuba.sk/databasemenu/Geometry/Geometric%20spaces/Axioms/Theory/a
(hämtad 07.04.2018)

[11] https://faculty.etsu.edu/gardnerr/noneuclidean/hyperbolic.pdf
(hämtad 07.04.2018)

[12] https://fi.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert
(hämtad 07.04.2018)

[13] https://sv.wikipedia.org/wiki/Arkimedes
(hämtad 07.04.2018)

[14] https://sv.wikipedia.org/wiki/Aristoteles
(hämtad 07.04.2018)

[15] https://sv.wikipedia.org/wiki/J%C3%A1nos_Bolyai
(hämtad 07.04.2018)

[16] https://sv.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Girolamo_Saccheri
(hämtad 07.04.2018)

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Immanuel_Kant
(hämtad 07.04.2018)